Más sobre la función de onda (Potencial escalón)

$$\Psi_I(x,t) = A\, e^{i(kx-\omega t)} - A\left(\frac{x+ik}{x-ik}\right) e^{-i(kx+\omega t)} \quad (1)$$

Hacemos
$$e^{-i\alpha} = -\frac{x+ik}{x-ik} \quad (2)$$

$$\Psi_I(x,t) = A\left(e^{ikx} + e^{-i\alpha}\, e^{-ikx}\right) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

$$\Psi_I(x,t) = A\, e^{i(kx-\omega t)} + A\, e^{-i(kx+\omega t+\alpha)} \quad (4)$$

$$Re\{\Psi_I(x,t)\} = A\left[\cos(kx-\omega t) + \cos(kx+\omega t+\alpha)\right] \quad (5)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{Sen} a \operatorname{Sen} b \quad (6)$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{Sen} a \operatorname{Sen} b \quad (7)$$

$(6)+(7) \Rightarrow$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b \quad (8)$$

$$a+b = kx-\omega t \quad (9)$$
$$a-b = kx+\omega t+\alpha \quad (10)$$

(9) y $(10) \Rightarrow$
$$2a = 2kx+\alpha \Rightarrow a = kx + \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$
$$2b = -2\omega t - \alpha \Rightarrow b = -\omega t - \frac{\alpha}{2} \quad (12)$$

$(5), (8), (11), (12) \Rightarrow$

$$Re\{\Psi_I(x,t)\} = 2A\cos\left(kx+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}\right) \quad (13)$$

$\leftarrow$ Onda Estacionaria

$$\mathrm{Im}\{\Psi_I(x,t)\} = A\left[\mathrm{Sen}(kx-\omega t) - \mathrm{Sen}(kx+\omega t+\alpha)\right] \quad (14)$$

$$\mathrm{Sen}(a+b) = \mathrm{Sen}\,a\,\mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Sen}(b)\,\mathrm{Cos}(a) \quad (15)$$

$$\mathrm{Sen}(a-b) = \mathrm{Sen}\,a\,\mathrm{Cos}\,b - \mathrm{Sen}\,b\,\mathrm{Cos}\,a \quad (16)$$

$$\mathrm{Sen}(a+b) - \mathrm{Sen}(a-b) = 2\,\mathrm{Sen}(b)\,\mathrm{Cos}(a) \quad (17)$$

$$a+b = kx-\omega t \quad (18)$$

$$a-b = kx+\omega t+\alpha \quad (19)$$

$$\Rightarrow a = kx + \frac{\alpha}{2} \quad (20)$$

$$b = -\omega t - \frac{\alpha}{2} \quad (21)$$

$$\mathrm{Im}\{\Psi_I(x,t)\} = -2A\,\mathrm{Sen}\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{Cos}\left(kx+\frac{\alpha}{2}\right) \quad (22)$$

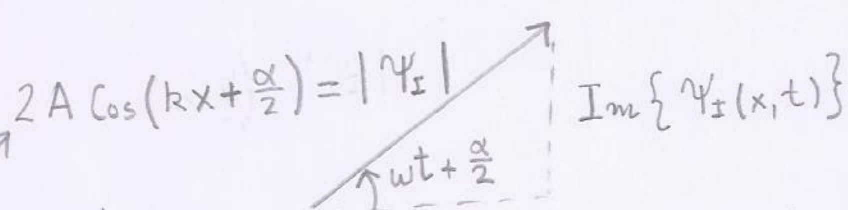
← Onda estacionaria

$$\Psi_I(x,t)\,\Psi_I^*(x,t) = \left(\mathrm{Re}\{\Psi_I(x,t)\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{\Psi_I(x,t)\}\right)^2 \quad (23)$$

(13), (22) y (23) ⇒

$$\Psi_I(x,t)\,\Psi_I^*(x,t) = 4A^2\,\mathrm{Cos}^2\left(kx+\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{Cos}^2\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}\right) + 4A^2\,\mathrm{Sen}^2\left(\omega t+\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{Cos}^2\left(kx+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \Psi_I(x,t)\,\Psi_I^*(x,t) = 4A^2\,\mathrm{Cos}^2\left(kx+\frac{\alpha}{2}\right) \quad (24)$$



Amplitud del movimiento oscilatorio para un x dado

$$\mathrm{Re}\{\Psi_I(x,t)\} = 2A\,\mathrm{Cos}\left(kx+\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{Cos}(\omega t+\alpha/2)$$

$$= |\Psi_I|\,\mathrm{Cos}(\omega t+\alpha/2)$$

✓ En realidad no hacía falta calcular la parte real y la parte imaginaria de $\Psi_I(x,t)$ para calcular $|\Psi_I(x,t)|^2$. Lo hice para mostrar que cada una de estas partes es una onda estacionaria.

✓ Se puede obtener $|\Psi_I(x,t)|^2$ como se muestra a continuación:

$$(3) \Rightarrow |\Psi_I|^2 = \Psi_I \Psi_I^* = AA^*\left(e^{ikx} + e^{-i\alpha} e^{-ikx}\right)\left(e^{-ikx} + e^{i\alpha} e^{ikx}\right)$$

$$= AA^*\left(1 + e^{-i\alpha} e^{-i2kx} + e^{i\alpha} e^{i2kx} + 1\right)$$

$$= AA^*\left(2 + 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} e^{i2kx}\right)\right)$$

$$= AA^*\left(2 + 2\cos(2kx+\alpha)\right) \qquad (25)$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \mathrm{Sen}^2 a \qquad (26)$$

$$1 = \cos^2 a + \mathrm{Sen}^2 a \qquad (27)$$

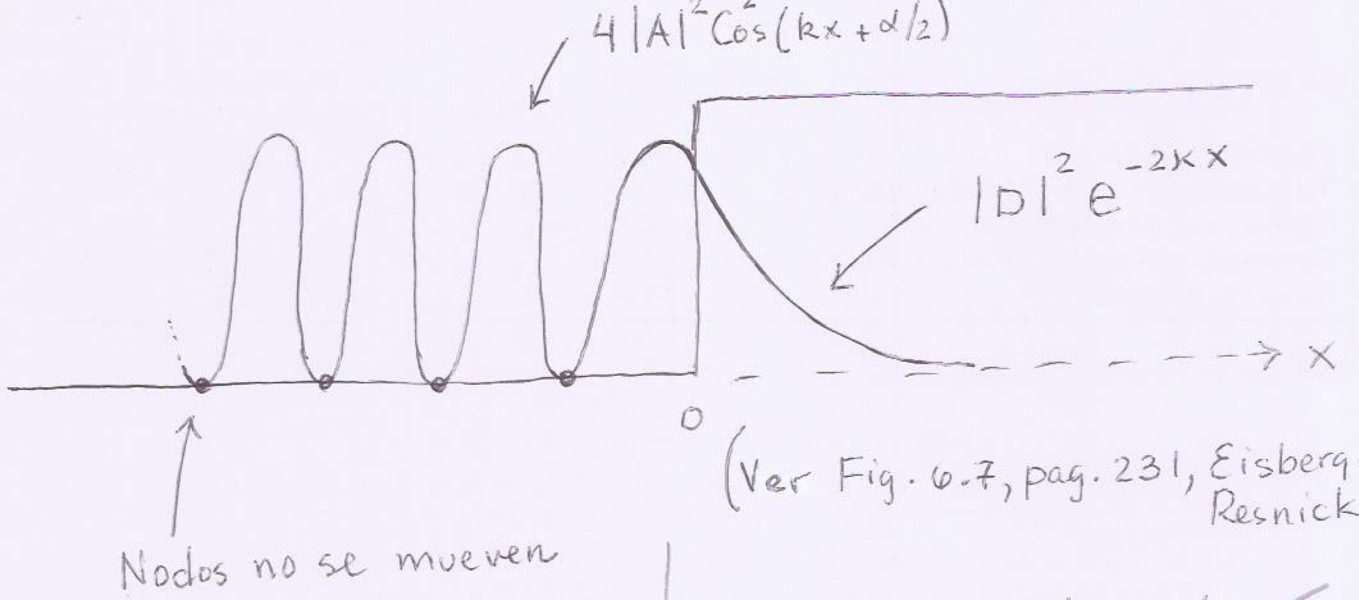
$$(26)+(27) \Rightarrow \cos(2a) + 1 = 2\cos^2 a \qquad (28)$$

$$2a = 2kx + \alpha \qquad (29)$$

$$a = kx + \frac{\alpha}{2} \qquad (30)$$

$$(25) \Rightarrow |\Psi_I|^2 = 2AA^*\left(1 + \cos(2kx+\alpha)\right) = (2AA^*)\left(2\cos^2\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right.\right.$$

$$|\Psi_I|^2 = 4A^2\cos^2\left(kx + \frac{\alpha}{2}\right) \qquad (31)$$


$4|A|^2 \cos^2(kx + \alpha/2)$
$|D|^2 e^{-2\kappa x}$
x
0
(Ver Fig. 6.7, pag. 231, Eisberg-Resnick)
Nodos no se mueven

De las cardiciones de bade tenemos:

$$A + B = D \qquad (32)$$

$$ikA - ikB = -\chi D \qquad (33)$$

Vamos a escribir A y B en función de D

$$(32) \Rightarrow \quad ikA + ikB = ikD$$
$$(33) \Rightarrow \quad ikA - ikB = -\varkappa D$$

$$\Rightarrow \quad 2ikA = ikD - \varkappa D$$
$$A = \frac{1}{2ik}(ik - \varkappa)D \qquad (34)$$

$$(32) \Rightarrow \quad -ikA - ikB = -ikD$$
$$ikA - ikB = -\varkappa D$$

$$\Rightarrow \quad -2ikB = (-ik - \varkappa)D$$
$$B = \frac{ik + \varkappa}{2ik} D \qquad (35)$$

$$\Psi_I(x,t) = A\,e^{i(kx-\omega t)} + B\,e^{-i(kx+\omega t)} \qquad (36)$$

$$\Psi_I(x,t) = e^{-i\omega t}\left[Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\right]$$
$$= e^{-i\omega t}\left[\frac{1}{2ik}(ik-\varkappa)D\,e^{ikx} + \frac{ik+\varkappa}{2ik}D\,e^{-ikx}\right]$$
$$= De^{-i\omega t}\left[\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varkappa}{2k}\right)e^{ikx} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\varkappa}{2k}\right)e^{-ikx}\right]$$
$$= \frac{D}{2}\left[\left(1 + i\frac{\varkappa}{k}\right)e^{ikx} + \left(1 - i\frac{\varkappa}{k}\right)e^{-ikx}\right]e^{-i\omega t}$$
$$= D\,e^{-i\omega t}\,\mathrm{Re}\left\{\left(1 + i\frac{\varkappa}{k}\right)e^{ikx}\right\}$$
$$= D\,e^{-i\omega t}\,\mathrm{Re}\left\{\left(1 + i\frac{\varkappa}{k}\right)(\cos kx + i\,\mathrm{Sen}\,kx)\right\}$$
$$= D\,e^{-i\omega t}\,\mathrm{Re}\left\{\cos kx + i\frac{\varkappa}{k}\cos kx + i\,\mathrm{Sen}\,kx - \frac{\varkappa}{k}\mathrm{Sen}\,kx\right.$$

$$\Psi_I(x,t) = D\, e^{-i\omega t}\left(\cos kx - \frac{K}{k}\,\mathrm{Sen}\, kx\right) \qquad (37)$$

$\Rightarrow$ la autofunción en la región I es

$$\Phi_I(x) = D\left(\cos kx - \frac{K}{k}\,\mathrm{Sen}\, kx\right) \qquad (38)$$

La autofunción tiene un valor fijo (para cualquier tiempo) para cada x.
La función de onda $\Psi_I(x,t)$ en un punto dado x cambia en el tiempo por el factor $e^{-i\omega t}$.

Existen valores fijos de x para los que la autofunción siempre es nula. Estos puntos son los nodos que no se mueven. La onda material $\Psi_I(x,t)$ se comporta en este caso como la onda en una cuerda (fija por sus dos extremos) donde se ha establecido una onda estacionaria.

¿Cuales son los valores de x donde están los nodos?

$$\Phi_1(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos kx - \frac{K}{k}\,\mathrm{Sen}\, kx = 0$$

$$\Rightarrow \tan(kx) = \frac{k}{K} \qquad (39)$$

$$k = \frac{\sqrt{2m(E)}}{\hbar} \qquad K = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}$$